UOT 338.43

SİNQULYAR İNTEQRALLARIN BƏZİ LOKAL XASSƏLƏRİ

Lalə Rəhman qızı ƏLİYEVA

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru

AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu
a.lala@yahoo.com

Məqalədə orta ossilyasiya terminlərində və Φ ossilyasiya terminlərində lokal cəmlənən funksiyaların və çoxölçülü sinqulyar inteqralların bəzi lokal xassələri öyrənilmişdir. Müasir dövrdə riyazi məsələlərin geniş şəkildə araşdırılması çox mühüm aktuallıq kəsb edir. Məhz buna görə də sinqulyar inteqralların bəzi lokal xassələrinin geniş araşdırılması zəruri hesab olunur. Tədqiqat nəticəsində əldə olunmuş nəticələr öz elmiliyi ilə seçilir.

Açar sözlər: *sinqulyar inteqral operatorlar, orta ossilyasiya, fossilyasiya, riyaziyyat, mexanika*

$B(a,r):=\left\{x\in R^n : |x\text{-}a|\le r\right\}$ R^n Evklid fəzasında radiusu $r>0$, mərkəz nöqtəsi $a\in R^n$ olan qapalı şar olsun. $\left\{x^\nu\right\}$, $|\nu|\le k$ qüvvət funksiyaları sisteminə

$$(f,g):=|B(0,1)|^{-1}\int_{B(0,1)} f(t)g(t)dt$$

skalyar hasilinə nəzərən ortoqonallaşdırma prosesini tətbiq edək, harada ki, $|E|$ ilə $E\subset R^n$ çoxluğunun lebeq ölçüsü işarə olunur, $\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $x^\nu=x_1^{\nu_1}\cdot x_2^{\nu_2}\cdot...\cdot x_n^{\nu_n}$, $|\nu|=\nu_1+\nu_2+...+\nu_n$, burada $\nu_1,\nu_2,...,\nu_n$ və $k-$ mənfi olmayan tam ədədlərdir. Ortoqonallaşdırma prosesi nəticəsində alınan ortoqonal və normallaşdırılmış sistemi $\left\{\varphi_\nu\right\}$, $|\nu|\le k$ ilə işarə edək.

$L^p_{loc}(R^n)$ $(1\le p<\infty)$ ilə bütün p-dərəcəli lokal cəmlənən funksiyalar sinfini, $L^\infty_{loc}(R^n)$ $-$ ilə isə R^n-də bütün lokal məhdud funksiyalar sinfini işarə edək.

$f \in L^1_{loc}\left(R^n\right)$, $k \in N \cup \{0\}$ (N –natural ədədlər çoxluğudur) olsun. Aşağıdakı çoxhədlini qeyd edək:

$$P_{k,B(a,r)} f(x) := \sum_{|\nu| \le k} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} f(t) \varphi_\nu \left(\frac{t-a}{r} \right) dt \right) \varphi_\nu \left(\frac{x-a}{r} \right)$$

$P_{k,B(a,r)} f$ –dərəcəsi k -nı aşmayan çoxhədlidir. R^n -də dərəcəsi k -nı aşmayan bütün çoxhədlilər külliyatını P_k ilə işarə edək. Beləliklə, $P_{k,B(a,r)} f \in P_k$.

$f \in L^p_{loc}\left(R^n\right)$, $(1 \le p \le \infty)$ funksiyası üçün aşağıdakını işarə edək:

$$\Omega_k\left(f, B(a,r)\right)_p := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{|B(a,r)|} \displaystyle\int_{B(a,r)} \left| f(t) - P_{k-1,B(a,r)} f(t) \right|^p dt \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup} \left\{ \left| f(t) - P_{k-1,B(a,r)} f(t) \right| : \ t \in B(a,r) \right\}, & p = \infty. \end{cases}$$

$\Omega_k\left(f, B(a,r)\right)_p$ f funksiyasının L^p metrikasında $B(a,r)$ şarında k -tərtibdən orta ossilyasiyası adlanır.

$f \in L^p_{loc}\left(R^n\right)$, $(1 \le p \le \infty)$ funksiyası üçün növbəti metrik xarakteristikaya baxaq:

$$m_f^k(x_0;\delta)_p := \sup\left\{ \Omega_k\left(f, B(x_0;r)\right)_p : \ r \le \delta \right\} \quad (\delta > 0),$$

harada ki, $x_0 \in R^n$ qeyd olunmuş nöqtədir, $k \in N$.

$f \in L^p_{loc}\left(R^n\right)$, $1 \le p \le \infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ olsun.

Əgər:

$$m_f^{k+1}(x_0;\delta)_p = o\left(\delta^k\right), \quad \delta \to 0.$$

olarsa, onda $x_0 \in R^n$ nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının m_p^k nöqtəsi adlanır. f funksiyasının bütün m_p^k nöqtələr çoxluğunu $M_p^k(f)$ ilə işarə edək.

$|\nu| \le k$ şərtini ödəyən hər bir $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ üçün $D_\nu f(x_0)$ varsa, hansı ki,

$$\left| D^\nu P_{k,B(x_0,r)} f(x_0) - D_\nu f(x_0) \right| = o\left(r^{k-|\nu|}\right), \quad r \to 0$$

şərtini ödəyir, onda $x_0 \in R^n$ nöqtəsi $f \in L^1_{loc}\left(R^n\right)$ funksiyasının d^k -nöqtəsi adlanır.

f funksiyasının bütün d^k -nöqtələr çoxluğunu $D^k(f)$ ilə işarə edək.

Fərz edək ki, dərəcəsi k -nı aşmayan elə $P_{x_0}(f;x)$ çoxhədlisi var ki, $p=\infty$ halında uyğun modifikasiya ilə

$$\left(\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}\left|f(t)-P_{x_0}(f;t)\right|^p dt\right)^{1/p}=o\left(r^k\right),\quad r\to 0,$$

şərtini ödəyir, onda deyirlər ki, f funksiyası $x_0\in R^n$ nöqtəsində L^p mənada k tərtibli törəmələrə malikdir [1, p. 9-16].

f funksiyasının L^p mənada k tərtibli törəmələrinin olduğu nöqtələri $L_p^k(f)$ ilə işarə edəcəyik. $L_p^k(f)$-dən olan hər bir nöqtəni f funksiyasının l_p^k nöqtəsi adlandıracağıq.

Əgər $f\in L_{loc}^p(R^n)$, $1\le p\le\infty$, $k\in N\cup\{0\}$ olarsa, onda

$$L_p^k(f)=M_p^k(f)\cap D^k(f).$$

f funksiyasının $x_0\in R^n$ nöqtəsində d^k nöqtələrinin $m_{f}^k(x_0;\delta)_p$ metrik xarakteristikası terminlərində kifayət qədər şərtləri tapılır. Bunun üçün aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur:

Teorem 1. $f\in L_{loc}^1(R^n)$ olsun. Əgər $k\in N\cup\{0\}$ və

$$\int_0^1 t^{-k-1}\cdot m_f^{k+1}(x_0;t)_1\,dt<+\infty,$$

onda istənilən $\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$ üçün $|\nu|\le k$ şərtini ödəyən

$$D_\nu f(x_0):=\lim_{r\to 0}D^\nu P_{k,B(x_0,r)}f(x_0)$$

limiti var və

$$\left|D^\nu P_{k,B(x_0,r)}f(x_0)-D_\nu f(x_0)\right|=o\left(r^{k-|\nu|}\right),\quad r\to 0$$

münasibəti doğrudur, onda x_0 nöqtəsi f funksiyasının d^k –nöqtəsidir.

$f\in L_{loc}^p(R^n)$, $1\le p\le\infty$, $x_0\in R^n$ olsun və $|\nu|\le k-1$ şərtini ödəyən istənilən ν üçün

$$\lim_{r\to 0}D^\nu P_{k-1,B(x_0,r)}f(x_0)=:D_\nu f(x_0)$$

limiti var. Aşağıdakıları işarələmələri daxil edək:

$$P_{k-1,x_0} f(t) := \sum_{|\nu|\le k-1} D_\nu f(x_0) \frac{(t-x_0)^\nu}{\nu!},$$

$$n_f^k(x_0;\delta)_p := \sup_{0<r\le\delta} \left(\frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} \left| f(t) - P_{k-1,x_0} f(t) \right|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$n_f^k(x_0;\delta)_\infty := \sup_{0<r\le\delta} \left\| f - P_{k-1,x_0} f \right\|_{L^\infty(B(x_0,r))}.$$

f funksiyasının $x_0 \in R^n$ nöqtəsində k tərtibli L^p mənada törəməyə malik olması üçün $n_f^k(x_0;\delta)_p$ xarakteristika terminlərində zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır [2, p.9-26].

Teorem 2. $f \in L^p_{loc}(R^n)$ $1 \le p \le \infty$ olsun. Onda aşağıdakı şərtlər ekvivalentdirlər:

1) $x_0 \in L_p^k(f)$;

2) $|\nu| \le k-1$ şərtini ödəyən istənilən ν üçün $\lim_{r\to 0} D^\nu P_{k-1,B(x_0,r)} f(x_0) =: D_\nu f(x_0)$ limiti var və

$$n_f^{k+1}(x_0;\delta)_p = o(\delta^k), \quad \delta \to 0.$$

Aşağıdakı sinqulyar inteqral operatora baxaq:

$$A_k f(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{R^n} \left\{ K_\varepsilon(x-y) - \left(\sum_{|\nu|\le k-1} \frac{x^\nu}{\nu!} D^\nu K(-y) \right) X_{\{|t|>1\}}(y) \right\} f(y)dy,$$

harada ki,

$$K(x) = \omega(x) \cdot |x|^{-n}, \quad \int_{S^{n-1}} \omega(x)ds = 0, \quad K_\varepsilon(x) = K(x) \cdot X_{\{|t|>\varepsilon\}}(x),$$

$\omega(x)$ 0 dərəcədən bircins funksiyadir, $X_{\{|t|>\varepsilon\}}$ –funksiyası $\{t \in R^n : |t| > \varepsilon\}$ çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır, S^{n-1} isə R^n evklid fəzasında vahid radiuslu sferadır. Fərz edək ki, $k=1$ olduqda $K(x)$ funksiyası differensiallanandır və birinci tərtib məhdud xüsusi törəmələrə malikdir, $k \lhd 1$ olduqda isə $K(x)$ funksiyası S^{n-1} sferası üzərində k dəfə kəsilməz differensiallanan funksiyadır; $v = (v_1, v_2, \ldots v_n)$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – tam mənfi olmayan ədədlərdir, $|v| = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$, $v! = v_1! v_2! \ldots v_n!$ $k \in N$,

$$D^{\nu} f := \frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}.$$

Qeyd edək ki, əgər $f \in L^p(R^n)\ (1 \le p < \infty)$, onda $A_k f$ sinqulyar inteqralı

$$Tf(x) := \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{R^n} K_{\varepsilon}(x-y)\, f(y)dy$$

inteqralından dərəcəsi $k-1$-i aşmayan çoxhədli ilə fərqlənir, hər iki inteqral R^n-də sanki hər yerdə yığılandır.

Teorem 3. $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $x_0 \in R^n$, $f \in L^p_{loc}(R^n)$ olsun. $\tilde{f} := A_k f$, $k \in N$; $\varphi(x)$ $(0,+\infty)$-da mənfi olmayan monoton artan funksiya olsun,

$$\delta^k \int_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{k+1}}\, dt = O(\varphi(\delta))\ (\delta > 0).$$

Onda əgər $\theta = \infty$ halında uyğun modifikasiya ilə

$$\|f\|_{\varphi,\theta,k,p} := \left(\int_0^{\infty}\left(\frac{m_f^k(x_0;t)_p}{\varphi(t)}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} < +\infty$$

şərti ödənirsə

$$\|\tilde{f}\|_{\varphi,\theta,k,p} := \left(\int_0^{\infty}\left(\frac{m_{\tilde{f}}^k(x_0;t)_p}{\varphi(t)}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} < +\infty$$

şərti ödənir. Bundan başqa,

$$\forall f:\ \|\mathrm{f}\|_{\varphi,\theta,k,p} \le c\cdot\|f\|_{\varphi,\theta,k,p}$$

$c > 0$ həmişə vardır.

Xüsusi halda aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

Teorem 4. $f \in L^p_{loc}\left(R^n\right)$, $1 < p < \infty$, $k \in N$, $x_0 \in R^n$,

$$\int_0^1 \frac{\left\| n_f^k\left(x_0;t\right)\right\|_p}{t^k} dt \triangleright +\infty, \quad \int_1^\infty \frac{\left\| n_f^k\left(x_0;t\right)\right\|_p}{t^{k+1}} dt \triangleright +\infty$$

olsun. Onda

$$\left\| n^k_{\tilde{f}}\left(x_0;\delta\right)\right\|_p \le c\left(\delta^{k-1}\int_0^\delta \frac{\left\| n_f^k\left(x_0;t\right)\right\|_p}{t^k} dt + \delta^k \int_\delta^\infty \frac{\left\| n_f^k\left(x_0;t\right)\right\|_p}{t^{k+1}} dt\right), \quad \delta > 0,$$

bərabərsizliyi doğrudur, harada ki, $c>0$ f, δ və x_0 -dan asılı deyil.

$f \in L^p_{loc}\left(R^n\right)$ $1 < p < \infty, k \in N \cup \{0\}$, $x_0 \in R^n$ və

$$\int_0^1 \frac{\left\| n_f^{k+1}\left(x_0;t\right)\right\|_p}{t^k} \cdot \frac{dt}{t} < +\infty, \quad \int_1^\infty \frac{\left\| n_f^{k+1}\left(x_0;t\right)\right\|_p}{t^k} \cdot \frac{dt}{t^2} < +\infty$$

olsun.

Onda

$$\left\| n^{k+1}_{\tilde{f}}\left(x_0;\delta\right)\right\|_p = o\left(\delta^k\right), \quad \delta \to 0,$$

şərti ödənir, beləliklə $x_0 \in R^n$ nöqtəsi $\tilde{f} = A_k f$ funksiyasının l_p^k -nöqtəsidir.

Qeyd edək ki, teorem 4-ün birinci inteqral şərtlərindən $x_0 \in R^n$ nöqtəsinin f funksiyasının l_p^k nöqtəsi olduğu alınır [3, p. 111-118].

$\left\| n_f^k\left(x_0;\delta\right)\right\|_p$ xarakteristikasının köməyi ilə $NO^{k,p}_{\varphi,\theta}\left(x_0\right)$ fəzası daxil edək. Əgər $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $x_0 \in R^n$, $k \in N$, $\varphi(x)$ funksiyası $(0,+\infty)$ -da mənfi olmayan monoton artan funksiyadır,

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} dt = O\left(\varphi(\delta)\right) \; (\delta > 0),$$

$$\delta \int_\delta^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = O(\varphi(\delta)) \quad (\delta > 0)$$

şərtləri ödənərsə, onda $A_k f = \tilde{f}$ sinqulyar inteqral operatoru $NO^{k,p}_{\varphi,\theta}\left(x_0\right)$ fəzasına məhdud təsir edir.

Teorem 5. $f \in L^1_{loc}(R^n)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $k \triangleright \alpha + 1$, $x_0 \in R^n$ olsun. Onda istənilən $r > 0$ üçün

$$\int_{R^n} \frac{\left| f(x) - P_{k-1,B(x_0,r)} f(x) \right| dx}{r^{n+\alpha} + |x - x_0|^{n+\alpha}} \le c \cdot \int_r^{\infty} \frac{\mu_f^k(x_0;t)_1}{t^{n+\alpha+1}} dt ,$$

bərabərsizliyi doğrudur, harada ki, $c > 0$ f, x_0 və r-dən asılı deyil.

Buradan $m_f^k(x_0;\delta)_p$ xarakteristika terminlərində növbəti nəticələr alınır:

Nəticə 1. $f \in L^p_{loc}(R^n)$ $(1 \le p \le \infty)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $k \triangleright \alpha + 1$, $x_0 \in R^n$ olsun. Onda

$$r^{-n} \int_{R^n} \frac{1}{1 + \left(\frac{|x - x_0|}{r} \right)^{n+\alpha}} \left| f(x) - P_{k-1,\mathrm{B}(x_0,r)} f(x) \right| dx \le$$
$$\le c \cdot r^{\alpha} \int_r^{\infty} \frac{m_f^k(x_0;t)_p}{t^{\alpha+1}} dt, \quad (r > 0),$$

bərabərsizliyi doğrudur , harada ki, $c > 0$ f, x_0 və r-dən asılı deyil.

$\Phi(x)$ $(x \in R^n)$ R^n-də cəmlənən funksiya olsun,

$$\Phi(x) \ge 0 \ (x \in R^n), \qquad \int_{R^n} \Phi(x) dx = 1;$$

$$\Phi_r(x) := r^{-n} \Phi\left(\frac{x}{r} \right) \left(r > 0, \quad x \in R^n \right);$$

$$\Omega_{k,\Phi}(f, B(x;r)) := \int_{R^n} \Phi_r(x - t) \left| f(t) - P_{k-1,\mathrm{B}(x,r)} f(t) \right| dt ,$$

harada ki, $f \in L^1_{loc}(R^n)$, $k \in \mathrm{N}$.

$\Omega_{k,\Phi}(f, B(x;r))$ f funksiyasının $B(x,r)$ şarında k-tərtibli Φ-ossilyasiyası adlanır.

Bundan başqa

$$h_f^{k,\Phi}(x;\delta) := \sup\left\{ \Omega_{k,\Phi}(f, B(x;r)) : \quad 0 < r \le \delta \right\}, \quad \delta > 0, \quad x \in R^n ,$$

$$H_f^{k,\Phi}(\delta) := \sup\left\{ h_{\mathrm{f}}^{\mathrm{k},\Phi}(x;\delta) : \quad x \in R^n \right\}, \quad \delta > 0.$$

olsun. Aydındır ki, $h_f^{k,\Phi}(x;\delta)$ və $H_f^{k,\Phi}(\delta)$ funksiyaları $\delta \in (0;+\infty)$ arqumentinə görə monoton artandır.

$\Phi(x) \equiv \Phi^{(\alpha)}(x) := c(n;\alpha)\cdot \dfrac{1}{1+|x|^{n+\alpha}}$, $\alpha > 0$ olsun, harada ki, $c(n,\alpha)$ sabitdir,

$$\int_{R^n} \Phi^{(\alpha)}(x)dx = 1 \cdot$$

Növbəti işarələmələri daxil edək:

$$\Omega_{k,\alpha}(f, B(x;r)) := \Omega_{k,\Phi^{(\alpha)}}(f, B(x,r)),$$
$$h_f^{k,\alpha}(x;\delta) := h_f^{k,\Phi^{(\alpha)}}(x;\delta), \quad H_f^{k,\alpha}(\delta) := H_f^{k,\Phi^{(\alpha)}}(\delta).$$

Yoxlamaq olar ki, əgər $\Phi(x) \equiv \dfrac{1}{|B(0,1)|}\cdot X_{B(0,1)}(x)$, harada ki, X_E funksiyası $E \subset R^n$ çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır, onda

$$\Omega_{k,\Phi}(f, B(x;r)) = \Omega_k(f, B(x,r))_1$$

harada ki, $\Omega_k(f, B(x;r))_1$ f funksiyasının $B(x,r)$ şarında L^1 metrik fəzasında k tərtibli orta ossilyasiyasıdır.

Daha sonra biz növbəti işarələməni daxil edək:

$$M_f^k(\delta)_p := \sup\left\{ m_f^k(x;\delta)_p : \quad x \in R^n \right\} \qquad (\delta > 0),$$
$$1 \le p \le \infty, \; k \in \mathrm{N}.$$

Xüsusi halda aşağıdakı təkliflər isbat olunmuşdur [4, p.595-609].

Təklif 1. $f \in L_{loc}^p(R^n)$ $(1 \le p \le \infty)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $k < \alpha + 1$, $x_0 \in R^n$ olsun. Onda

$$h_f^{k,\alpha}(x_0;\delta) \le c\cdot\delta^{\alpha}\int_{\delta}^{\infty}\frac{m_f^k(x_0;t)_p}{t^{\alpha+1}}dt, \; \delta > 0,$$

bərabərsizliyi doğrudur, harada ki, $c > 0$ f, x_0 və δ -dan asılı deyil.

Təklif 2. $f \in L^p_{loc}(R^n)$ $(1 \le p \le \infty)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $k < \alpha + 1$ olsun. Onda

$$H_f^{k,\alpha}(\delta) \le c\cdot\delta^{\alpha}\int_{\delta}^{\infty}\frac{M_f^k(t)_p}{t^{\alpha+1}}dt, \qquad \delta > 0,$$

bərabərsizliyi doğrudur, harada ki, $c > 0$ f və δ -dan asılı deyil.

Təklif 3. $f \in L^1_{loc}(R^n)$, $\alpha > 0$, $k \in \mathrm{N}$ olsun. Onda

$$m_f^k(x;\delta)_1 \le c\cdot h_f^{k,\alpha}(x;\delta)\left(x \in R^n,\ \delta > 0\right),$$

$$M_f^k(\delta)_1 \le c\cdot H_f^{k,\alpha}(\delta)\,(\delta > 0),$$

bərabərsizliyi doğrudur, harada ki, $c > 0$ f, x və δ -dan asılı deyil.

$P(x)$ R^n -də Puasson nüvəsi, həmçinin

$P(x) = c_n\cdot\left(1+|x|^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$,

$P_r(x) := r^{-n}P\left(\frac{x}{r}\right)$ $(r > 0)$ və $f \in L^1_{loc}(R^n)$ olsun,

$$P_r f(x) := (P_r * f)(x) = \int_{R^n} f(t)P_r(x-t)dt.$$

$$\int_{R^n}\left|f(t) - P_r f(x)\right|P_r(x-t)dt$$

f funksiyasının harmonik ossilyasiyası adlandıracağıq. Növbəti işarələməni daxil edək:

$$h_f(x;\delta) := \sup_{0<r\le\delta}\int_{R^n}\left|f(t) - P_r f(x)\right|P_r(x-t)dt$$

$\left(x \in R^n,\ \delta > 0\right)$,

$$H_f(\delta) := \sup\left\{h_f(x;\delta):\ x \in R^n\right\}, \qquad \delta > 0.$$

Qeyd edək ki, harmonik ossilyasiya birinci tərtib Φ -ossilyasiya ilə ekvivalentdir. Buradan çıxır ki,

$$h_f(x;\delta) \approx h_f^{1,1}(x;\delta)\left(x \in R^n,\ \delta > 0\right),$$

$$H_f(\delta) \approx H_f^{1,1}(\delta)\,(\delta > 0).$$

(Əgər f və g funksiyaları $X \subset R^m$ çoxluğuna daxildirsə, onda $f(x) \approx g(x)$, $(x \in X)$, onu göstərir ki, $f(x) = O(g(x))$ $(x \in X)$ və $g(x) = O(f(x))$, $(x \in X)$ şərti ödənir.)

Teorem 6. $f \in L^1_{loc}(R^n)$ olsun. Onda

$$m_f^1(x;\delta) \le c_1 \cdot h_f^1(x;\delta) \le c_2 \cdot \delta \int_\delta^\infty \frac{m_f^1(x;t)}{t^2}\,dt, \qquad (x \in R^n,\ \delta > 0);$$

$$M_f^1(\delta) \le c_1 \cdot H_f^1(\delta) \le c_2 \cdot \delta \int_\delta^\infty \frac{M_f^1(t)}{t^2}\,dt, \qquad (\delta > 0),$$

bərabərsizlikləri doğrudur, harada ki, $c_1 > 0$ və $c_2 > 0$ f, x və δ -dan asılı deyil.

Aşağıdakını xatırlayaq:

$$M_f^k(\delta) := M_f^k(\delta)_1 := \sup\left\{\Omega_k(f, B(x,r))_1 : \ 0 < r \le \delta,\ x \in R^n\right\} \qquad (\delta > 0).$$

Ψ ilə $(0,+\infty)$-də bütün müsbət monoton artan $\varphi(t)$ funksiyalar sinfini işarə edək, hansı ki, $\varphi(+0) = 0$. $\varphi(t) \equiv 1$ funksiyasını Ψ sinfindən olduğunu hesab edəcəyik. Ψ_k ilə bütün $\varphi \in \Phi$ funksiyalar sinfini işarə edəcəyik, hansı ki, $\frac{\varphi(t)}{t^k}$ sanki yox olur.

$\varphi \in \Psi_k$, $k \in N$, $1 \le \theta \le \infty$ olsun. $BMO^k_{\varphi,\theta}$ ilə bütün $f \in L_{loc}(R^n)$ funksiyalar sinfini işarə edək, hansı ki, $\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}} < +\infty$, harada ki,

$$\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}} := \left(\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{M}_f^k(t)}{\varphi(t)} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \qquad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\infty}} := \sup\left\{ \frac{\mathrm{M}_f^k(t)}{\varphi(t)} : \ t > 0 \right\}.$$

$f \in L_{loc}(R^n)$, $\alpha > 0$, $k \in N$, $\varphi \in \Psi_k$ olsun. Aşağıdakı işarələmələrdən istifadə edəcəyik:

$$A^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}(f) := \left(\int_0^\infty \left(\frac{H^{k,\alpha}_f(t)}{\varphi(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad 1\le\theta<\infty,$$

$$A^{k,\alpha}_{\varphi,\infty}(f) := \sup\left\{\frac{H^{k,\alpha}_f(t)}{\varphi(t)} : \quad t>0\right\}.$$

Teorem 2.4.1. $f\in L_{loc}(R^n)$, $1\le\theta\le\infty$, $\alpha>0$, $k\in N$, $\varphi\in\Psi_k$ olsun. Onda əgər $A^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}(f)<+\infty$, $f\in BMO^k_{\varphi,\theta}$ və

$$\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}} \le c\cdot A^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}(f),$$

bərabərsizliyi doğrudur, harada ki, $c>0$ f-dən asılı deyil.

Teorem 7. $f\in L_{loc}(R^n)$, $\alpha>0$, $k=(\alpha)+1$, $\varphi\in\Psi_k$ olsun və

$$\delta^\alpha\int_\delta^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}}dt = O(\varphi(\delta)), \quad \delta>0$$

şərti ödənir. Onda əgər $f\in BMO^k_{\varphi,\theta}$, o zaman

a) $\displaystyle\int_{R^n}\frac{|f(x)|}{1+|x|^{n+\alpha}}dx<+\infty$,

b) $A^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}(f)<+\infty$.

Bunun üçün

$$A^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}(f)\le c\cdot\|f\|_{BMO^k_{\varphi,\theta}},$$

bərabərsizliyi doğrudur, harada ki, $c>0$ f-dən asılı deyil.

$\varphi\in\Psi_k$, $k\in N$, $1\le\theta\le\infty$, $\alpha>0$, $k<\alpha+1$ olsun. $HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}$ ilə bütün $f\in L_{loc}(R^n)$ funksiyalar külliyatını işarə edək, hansı ki, $A^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}<+\infty$. Bu sinifin normasını daxil edək:

$$\|f\|_{HO^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}} := A^{k,\alpha}_{\varphi,\theta}.$$

$\alpha>0$, $k=(\alpha)+1$, $1\le\theta\le\infty$, $\varphi\in\Psi_k$ olsun və

$$\delta^\alpha\int_\delta^\infty \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha+1}}dt = O(\varphi(\delta)), \quad \delta>0$$

şərti ödənir. Onda $\underset{\varphi,\theta}{HO}^{k,\alpha} = \underset{\varphi,\theta}{BMO}^{k}$ və onların normaları ekvivalentdirlər.

$\alpha > 0$, $k \in N$, $k < \alpha + 1$, $1 \le \theta \le \infty$, $\mu = \min\{\alpha, k\}$, $\varphi \in Z_\mu$ olsun. Onda A_k operatoru $HO_{\varphi,\theta}^{k,\alpha}$ fəzasında məhdud təsir edir [5, p.167-176].

Ədəbiyyat:

1. Aliyeva L.R. Some local properties of singular integral in terms of mean oscillation. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2006, v.26, №7, p.9-16.
2. Aliyeva L.R. Equivalent norms in spaces of mean oscillation. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2011, v.31, №4, p.19-26.
3. Rzaev R.M., Aliyeva L.R. On some local properties of functions. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2005, v.25, №4, p.111-118.
4. Rzaev R.M., Aliyeva L.R. On local properties of functions and singular integrals in terms of the mean oscillation. Cent. Eur. J. Math., 2008, v.6, №4, p.595-609.
5. Rzaev R.M., Aliyeva L.R. Mean oscillation, Φ-oscillation and harmonic oscillation. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 2010, v.30, №1, p.167-176.

Лала Рахман кызы Алиева

Исследование структурных свойств сингулярных интегралов в терминах средней осцилляции

Резюме

В статье рассматриваются местных терминах средней осцилляции и осцилляции с точки зрения некоторых локальных свойств функций и многомерных сингулярных интегралов изученных. Исследование широкий спектр математических задач в современной эпохе имеет решающее значение. Поэтому необходимо изучить широкий спектр сингулярных интегралов. Также в статье рассмотрены некоторые локальных свойств. В результате проведенного исследования, полученных результатов отличаются с научного стороны.

Ключевые слова: сингулярные интегральные операторы, среднее колебание, колебание, математика, механика

Lala Rahman Aliyeva

Research of the structural properties of sinqular integrals in terms of the mean oscillation

Summary

The article focuses on local terms of mean oscillation and oscillation in terms of some of the local properties of functions and multidimensional singular integrals studied. The study of a wide range of mathematical problems in the modern era is important.. Therefore, it is necessary to study a wide range of singular integrals. Also in the article some local properties are considered. As a result of the study, the results analyzed from the scientific side.

Keywords: singular integral operators, the average oscillation, oscillation, mathematical, mechanical